Calcul explicite de certaines cellules de Kazhdan-Lusztig pour le type A_n-1

Nicolas Jacon

Calcul explicite de certaines cellules de Kazhdan-Lusztig pour le type A_{n-1}

Nicolas Jacon

Résumé. Dans cette note, nous déterminons explicitement les cellules de Kazhdan et Lusztig contenant les éléments de longueur maximale dans les sous-groupes paraboliques de $\mathfrak{S}_n$ associés à une partition de n.

1. Introduction

Soit W un groupe de Coxeter. Dans [**KL**], Kazhdan et Lusztig ont donné un moyen de partitionner W en "cellules à gauche". Ces cellules jouent un rôle fondamental par exemple dans la théorie des représentations des algèbres de Hecke et des groupes de Lie (voir par exemple [**Lu2**]). Dans le cas du groupe symétrique, groupe qui nous intéresse ici (c'est à dire lorsque $W = A_{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$), la correspondance de Robinson-Schensted fournit un algorithme relativement simple pour la détermination de ces cellules. Cependant, il pourrait être intéressant de déterminer explicitement l'ensemble des éléments appartenant à une cellule donnée.

Le but de cette note est de résoudre ce problème pour une certaine classe de cellules: les cellules contenant un élément de longueur maximal dans un sous-groupe parabolique de la forme $\mathfrak{S}_\lambda$ où λ est une partition de n. Dans la première partie, nous rappelons la définition de ces cellules (pour le type A_{n-1}) et de la correspondance de Robinson-Schensted. Puis, nous déterminons explicitement la forme des cellules ci-dessus, la preuve du théorème principal (Théorème 3.3) étant élémentaire et purement combinatoire.

2. Cellules de Kazhdan-Lusztig pour le groupe symétrique, correspondance de Robinson-Schensted

Nous introduisons dans cette partie la relation d'équivalence $\sim_L$ permettant de définir les cellules de Kazhdan-Lusztig dans le cadre du groupe symétrique. Dans le cadre général des groupes de Coxeter, cette relation fait appel à la théorie de Kazhdan-Lusztig et en particulier à la base de

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20F55.

Kazhdan-Lusztig associée à l'algèbre de Hecke du groupe de Coxeter (voir [**KL**]). Cependant, dans le cadre qui nous intéresse ici, Kazhdan et Lusztig ont montré que cette relation se définit complètement élémentairement à l'aide de la correspondance de Robinson-Schensted (voir par exemple [**Ar**]).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique en n éléments. Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, nous désignons par s_i la transposition $(i\ i+1)$. Alors $\mathfrak{S}_n$ a une présentation par:

- générateurs: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$;
- relations:

$$\begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_i s_{i+1} s_i & \text{pour } i = 1, \dots, n-2 \\ s_j s_i = s_i s_j & \text{pour } |i-j| > 1. \end{array}$$

Nous allons maintenant introduire la relation d'équivalence $\sim_L$. Soit $l : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ la fonction longueur usuelle définie sur $\mathfrak{S}_n$. Soit $w \in \mathfrak{S}_n$, alors l'ensemble de descente (à gauche) de w est l'ensemble suivant:

$$L(w) = \{s \in S \mid l(sw) < l(w)\}.$$

Soit maintenant x et y deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ et soit $s \in S$, on écrit $x \sim_{L,s} w$ si et seulement si:

- $x = sw$, $l(sw) = l(w) + 1$ et $L(w) \not\subset L(x)$,
- ou $w = sx$, $l(sx) = l(x) + 1$ et $L(x) \not\subset L(w)$.

La relation d'équivalence $\sim_L$ est alors la clôture transitive de la relation $\sim_{L,s}$ c'est à dire que l'on a $x \sim_L y$ si et seulement si il existe des éléments $x_0 = x,\ x_1,\ \dots,\ x_{r-1},\ x_r = y$ de $\mathfrak{S}_n$ et $s_{j_0},\ s_{j_1},\ \dots,\ s_{j_{r-1}}$ des éléments de S tels que $x_i \sim_{L,s_{j_i}} x_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, r-1$. Les classes d'équivalence de $\sim_L$ sont appelées les cellules (à gauche) de Kazhdan-Lusztig. Elles permettent entre autres de construire les représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke de type A_{n-1}.

Un critère agréable permet de vérifier si deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont dans la même cellule: c'est la correspondance de Robinson-Schensted (voir [**Fu**] pour un exposé détaillé de cette correspondance et de ses applications). Pour donner cette correspondance, introduisons quelques notations. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition de rang n (tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$). Le diagramme de Young de λ est l'ensemble

$$D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Les éléments du diagramme de λ sont appelés les boîtes de λ.

On associe maintenant à chaque élément $w \in \mathfrak{S}_n$ une paire de tableaux de Young standard $(P(w), Q(w))$ de même forme $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, une partition de n (c'est à dire que les tableaux $P(w)$ et $Q(w)$ de forme λ sont remplies par les entiers $\{1, \dots, n\}$ de telle sorte que les coefficients sont disposés en ordre croissant dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas).

Exemple 2.1. Ci-dessous un tableau standard de forme $\lambda = (4, 2, 2, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 7 & 10 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Au départ, $P(w)$ et $Q(w)$ sont vides. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on insère récursivement sur les lignes de $P(w)$ l'entier $w(i)$ de façon à obtenir un tableau standard. Si tous les entiers situés sur la première ligne de $P(w)$ sont inférieurs à $w(i)$, on insère $w(i)$ sur la première ligne. Sinon, on remplace le plus petit entier j supérieur à $w(i)$ par $w(i)$ et on insère j sur la ligne suivante. Le processus débute sur la première ligne et s'arrête lorsque l'entier inséré ne prend la place d'aucun autre. Parallèlement, on note dans $Q(w)$ l'ordre d'apparition des boîtes. On obtient une application qui est en fait une bijection:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \to & \bigcup_{\lambda \in \Pi_n} T_\lambda \times T_\lambda \\ w & \mapsto & (P(w), Q(w)) \end{array}$$

où T_λ désigne l'ensemble des tableaux standard de forme λ et Π_n l'ensemble des partitions de n.

Exemple 2.2. Ci-dessous la correspondance de Robinson-Schensted pour $\mathfrak{S}_3$.

$$(P(1), Q(1)) = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}\, , \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array} \right) \quad (P(s_2 s_1), Q(s_2 s_1)) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\, , \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right)$$

$$(P(s_1), Q(s_1)) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\, , \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right) \quad (P(s_1 s_2), Q(s_1 s_2)) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\, , \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \right)$$

$$(P(s_2), Q(s_2)) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\, , \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \right) \quad (P(s_1 s_2 s_1), Q(s_1 s_2 s_1)) = \left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}\, , \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \right)$$

Finalement, deux éléments w_1 et w_2 sont dans la même cellule à gauche si et seulement si $Q(w_1) = Q(w_2)$. Ceci fournit donc un algorithme très efficace pour tester si deux éléments sont dans la même cellule.

3. Calcul explicite

Nous gardons les notations adoptées dans les sections précédentes auxquelles nous ajoutons les suivantes. Pour $i \leq j < n$, nous notons

$$r_{(i)}^{(j)} := s_j s_{j-1} \dots s_i$$

et

$$w_{(i)}^{(j)} := s_i s_{i+1} s_i \dots s_j s_{j-1} \dots s_i = r_{(i)}^{(i)} r_{(i)}^{(i+1)} \dots r_{(i)}^{(j)}.$$

Considérons une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ de n (où on suppose que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$). Soit $\mathfrak{S}_\lambda$ le sous groupe parabolique de $\mathfrak{S}_n$ correspondant. Il est engendré par la partie $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\}$ de S où l'ensemble $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ est obtenu en enlevant les entiers $\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j$ de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit maintenant w_λ l'élément de longueur maximale dans $\mathfrak{S}_\lambda$. Il est bien connu que:

$$w_\lambda = w_{(1)}^{(\lambda_1 - 1)} w_{(\lambda_1+1)}^{(\lambda_1+\lambda_2-1)} \dots w_{(\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i + 1)}^{(\sum\limits_{i=1}^{j+1} \lambda_i - 1)} \dots w_{(\sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i + 1)}^{(n-1)}.$$

Notons Γ_λ la cellule (à gauche) contenant l'élément w_λ. Le but de cette note est de déterminer explicitement cet ensemble Γ_λ. Par [**Lu**, 5.26.1] (résultat de Barbasch et Vogan, généralisé par Geck dans [**Ge**]), il existe une partie X_λ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant:

$$\Gamma_\lambda = \{x w_\lambda \mid x \in X_\lambda\},$$

et tel que pour tout $x \in X_\lambda$, on a $l(x w_\lambda) = l(x) + l(w_\lambda)$.

Lemme 3.1. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une partition de n. Soit $j \in [1, p-1]$ tel que $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$. Alors:*

$$r_{(\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} \in X_\lambda.$$

Preuve. On construit pour w_λ et $r_{(\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_\lambda$ les tableaux de Young $Q(w_\lambda)$ et $Q(r_{(\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_\lambda)$ donnés par la correspondance de Robinson-Schensted. On obtient dans les deux cas le même tableau. Ceci prouve que ces deux éléments sont dans la même cellule à gauche. $\square$

Nous avons maintenant le résultat suivant:

Lemme 3.2. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une partition de n, on suppose que $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$ pour $j \in [1, p-1]$, alors:*

$$r_{(\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_\lambda = w_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j - 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_p)} r_{(\sum\limits_{i=1}^{j-1} \lambda_i + 1)}^{(n-1)}.$$

Preuve. On a:

$$w_\lambda = w_{(1)}^{(\lambda_1-1)} w_{(\lambda_1+1)}^{(\lambda_1+\lambda_2-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)}.$$

On obtient donc:

$$r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_\lambda = w_{(1)}^{(\lambda_1-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{j-2} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i-1)} r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)}.$$

En utilisant les relations de $\mathfrak{S}_n$, on obtient:

$$r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i-1)} = w_{(\sum_{i=1}^{j-2} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i-2)} r_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)}.$$

De plus, on a:

$$r_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)} w_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)} = w_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i-2)} r_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)} w_{(\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j+2} \lambda_i-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)}.$$

On en déduit, par récurrence:

$$r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_\lambda = w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)} r_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)},$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal:

Théoreme 3.3. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une partition de n. En utilisant les notations introduites ci-dessus, on a:*

$$X_\lambda = \bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)} r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)},$$

en prenant comme convention: $r_{(i)}^{(j)} = 1$ si $j < i$ et $X_{(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p)} = \{0\}$ si $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ n'est pas une partition.

Preuve. On commence par montrer que si $(\lambda_1, \dots, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_p)$ est une partition de $n-1$, on a:

$$X_{(\lambda_1,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)} r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} \subset X_{(\lambda_1,\dots,\lambda_j,\dots,\lambda_p)}.$$

Soit donc $x \in X_{(\lambda_1,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)}$, d'après le lemme 3.2, on a:

$$r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} w_\lambda = w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)} r_{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)}.$$

Il suit donc:

$$xr^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}w_\lambda = xw_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)}r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}.$$

Par définition, il existe une suite $(s_{i_l})_{l=1,\dots,m}$ d'éléments de $\{s_1,\dots,s_{n-2}\}$ (le système de générateurs de $\mathfrak{S}_{n-1}$) telle que:

$$w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)} \sim_{L,s_{i_1}} \dots \sim_{L,s_{i_m}} xw_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)}$$

On peut composer par $r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}$ à droite car les éléments s_{i_l} intervenant dans les équivalences sont dans $\mathfrak{S}_{n-1}$, on obtient donc:

$$\begin{aligned}w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)}r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} &\sim_{L,s_{i1}} \cdots \\ \cdots &\sim_{L,s_{i_m}} xw_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)}r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2, il suit:

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)} \sim_{L,s_{i_1}} \dots \sim_{L,s_{i_m}} xr^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)}.$$

Or, d'après le lemme 3.1, on a:

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} \in X_\lambda,$$

il suit donc:

$$w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)} \sim_L r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)},$$

d'où:

$$w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)} \sim_L xr^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)}.$$

On a donc montré:

$$\bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)}r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} \subset X_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)}.$$

Notons également que les éléments de $\bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)}r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}$ sont tous distincts. On conclut la preuve par cardinalité: le cardinal des cellules Γ_λ correspond aux dimensions des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. On a:

$$|\Gamma_\lambda| = |X_\lambda|.$$

D'après [**Fu**, 4.3.8], on a:

$$|X_\lambda| = \sum_{j=1}^{p} |X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)}|,$$

avec $|X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)}| = 0$ si $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)$ n'est pas une partition. Il suit donc:

$$\bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)} = X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}$$

ce qu'il fallait montrer. □

Le corollaire suivant va maintenant nous donner la forme explicite des éléments composant la cellule Γ_λ. Notons que la donnée de ce type de cellules suffit pour construire toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. Introduisons quelques notations supplémentaires. Soit λ une partition de n avec $n_1(\lambda)$ parts égales à 1, $n_2(\lambda)$ parts égale à 2,…,$n_r(\lambda)$ égales à r. On notera alors $\lambda = (1^{n_1(\lambda)}, \ldots, (i-1)^{n_{i-1}(\lambda)}, i^{n_i(\lambda)}, \ldots, r^{n_r(\lambda)})$. De plus, si $n_k(\lambda) \neq 0$, on notera $\lambda^{(i)}$ la partition $(1^{n_1(\lambda)}, \ldots, (i-1)^{n_{i-1}(\lambda)+1}, i^{n_i(\lambda)-1}, \ldots, r^{n_r(\lambda)})$ de $n-1$. Le résultat suivant est une conséquence direct du Théorème 3.3.

Corollaire 3.4. *Soit $\lambda = (1^{n_1(\lambda)}, \ldots, (i-1)^{n_{i-1}(\lambda)}, i^{n_i(\lambda)}, \ldots, r^{n_r(\lambda)})$ une partition de n. Soit X_λ comme dans le Théorème 3.3. Alors, $x \in X_\lambda$ si et seulement si, il existe une suite d'entiers $i_j \in [1,r]$ avec $j = 2,\ldots,n$ vérifiant $n_{i_j}(\lambda^{(i_{j+1},\ldots,i_n)}) \neq 0$ et:*

$$x = r^{(1)}_{(\sum_{k=i_2}^{r} kn_k(\lambda^{(i_3,i_4,\ldots,i_n)}))} r^{(2)}_{(\sum_{k=i_3}^{r} kn_k(\lambda^{(i_4,i_5,\ldots,i_n)}))} \cdots$$
$$\cdots r^{(n-2)}_{(\sum_{k=i_{n-1}}^{r} kn_k(\lambda^{(i_n)}))} r^{(n-1)}_{(\sum_{k=i_n}^{r} kn_k(\lambda))}.$$

$y \in \Gamma_\lambda$ si et seulement si il existe une suite d'entiers $i_j \in [1,r]$ avec $j = 2,\ldots,n$ vérifiant:

$$y = r^{(1)}_{(\sum_{k=i_2}^{r} kn_k(\lambda^{(i_3,i_4,\ldots,i_n)})-i_2+1)} r^{(2)}_{(\sum_{k=i_3}^{r} kn_k(\lambda^{(i_4,i_5,\ldots,i_n)})-i_3+1)} \cdots$$
$$\cdots r^{(n-2)}_{(\sum_{k=i_{n-1}}^{r} kn_k(\lambda^{(i_n)})-i_{n-1}+1)} r^{(n-1)}_{(\sum_{k=i_n}^{r} kn_k(\lambda)-i_1+1)}.$$

References

[Ar] S. Ariki, *Robinson-Schensted correspondence and left cells*, Comb. meth. in rep. theory (Kyoto, 1998), Adv. Studies in Pure Math., **28**, 2000.

[Fu] W. Fulton, *Young tableaux*, London Math. Soc. Student Texts, **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Ge] M. Geck, *On the induction of Kazhdan-Lusztig cells*, Bull. London. Math. Soc., 608–614, **35**, 2003.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53**, 1979.

[Lu] G. Lusztig, *Left cells in Weyl groups. Lie group representations*, I, 99–111, Lecture Notes in Math., **1024**, Springer, Berlin, 1983.

[Lu2] G. Lusztig, *Intersection chomology methods in representation theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Kyoto, Japan, (I. Satake, ed.), Springer-Verlag, 1991, 155–174, 1990.

UFR Sciences et techniques - 16, route de Gray - 25 030 Besançon cedex.
E-mail address: jacon@math.univ-fcomte.fr